***Лекция 5***

**ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы.

Элементарная работа и мощность силы.

Второй закон Ньютона для свободной точки

τ

**F**

**Fτ**

**V**

d**r**

𝛼

Рис.1

связывает ускорение точки с силой.

Как известно, движение точки (ее скорость и траектория) определяется не только силой, но и начальными условиями. Задав произвольно положение и скорость точки, можно найти соответствующие им начальные условия. Множеству начальных условий соответствует множество ***возможных скоростей***  в данном положении точки. Конкретным начальным условиям соответствует ***действительная скорость*** в каждой точке траектории.

Умножим закон Ньютона скалярно на возможную скорость точки

(2)

Левую часть выражения можно представить в виде

Положительная величина

называется кинетической энергией точки.

Правая часть (2)

называется ***мощностью*** силы **F .** Приходим к ***теореме об изменении кинетической энергии***

(5)

*Скорость изменения кинетической энергии точки равна мощности силы.*

Теорема справедлива как в возможном, так и в действительном движении. Теорема показывает, что скорость изменения кинетической энергии максимальна при коллинеарности силы и скорости, и она равна нулю при их взаимной перпендикулярности.

Отсюда вытекает, например, что сила трения сцепления колеса с дорогой не развивает мощности при отсутствии проскальзывания. Также ведущая сила или момент, приложенные к колесу имеют нулевую мощность в момент трогания с места.

Теорему (5) можно записать в виде

Величина

называется ***элементарной работой*** силы ***F*** (Рис.1). Штрих в обозначении призван подчеркнуть, что в общем случае элементарная работа не является дифференциалом некоторой функции (А). В дальнейшем увидим, что только для «потенциальных» сил это будет полный дифференциал. Раскроем скалярное произведение

Из этого представления вытекает:

1. Знак работы определяется знаком Cos: работа положительна, если направление силы и перемещения совпадает с точностью до π/2.
2. Работу совершает только касательная составляющая силы.
3. Работа равна нулю если сила перпендикулярна перемещению.

Рассмотрим движение системы материальных точек { в инерциальной системе отсчета. ***Кинетической энергией системы*** называется положительная величина

Равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на точку обозначим **.** Теорему об изменении кинетической энергии системы запишем в виде

(повторяющийся индекс говорит о суммирование по индексу: от 1 до n, от 1 до *l*).

Значит, производная от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил.

**Теорема Кенига.**

Центр масс системы { имеет радиус вектор

В центре масс С выберем начало осей x y z подвижной системы отсчета, движущейся поступательно. Назовем ее ***С-системой.*** Радиус вектор точки системы относительно центра масс обозначим **ρ.** Теперь абсолютную скорость точки mk представим в виде

Переносная скорость для всех точек системы одинакова



Подставляем в формулу кинетической энергии

Приходим к ***теореме Кенига***

*Кинетическая энергия системы складывается из энергии поступательного движения системы с центром масс и энергии системы относительно С-системы .*

**Кинетическая энергия твердого тела.**

Рассмотрим движение ***свободного твердого тела*** относительно инерциальной системы координат x1 y1 z1. В формуле Кенига

для сплошного твердого тела сумма становится интегральной, масса элементарной dm,

а относительная скорость точки Vr в сферическом движении вокруг центра масс C должна быть найдена по формуле Эйлера.

**Vr=×= ×**

В матричной записи

*Vr= R*

Здесь *R-* присоединенная кососимметричная (*RТ=R)*  матрица радиуса вектора **rC**

Вычислим квадрат относительной скорости точки как произведения строки на столбец ее координат

*Vr****2*=***VrTVr=(R)T (R)=TRT (R)=T( R)R=T(R2)*

Подставив это выражение в формулу (2), получим

В квадратных скобках узнаем выражение матрицы тензора инерции относительно центра масс С.

*JC=* dm

Теперь формула кинетической энергии тела в произвольном движении приобретает вид

T= (MVC2+*TJC*)

***Поступательное движение***

В этом случае тело не вращается (=0) скорости всех точек одинаковы (V) и значит

T= Mv2

***Сферическое движение*** вокруг центра О

Повторив выкладки для Tr , но для центра О, получим аналогичную формулу

1) T= *TJO*

С другой стороны, мы знаем, что скорость точки тела в сферическом движении может быть найдена через расстояние до мгновенной оси L



V=hL

Тогда

T= 2

Интеграл дает момент инерции относительно мгновенной оси

JL

и мы приходим ко второй формуле

1. Т= JL2

***Вращательное движение***

Оно является частным случаем сферического движения, когда мгновенная ось совпадает с осью вращения z: JL=Jz



T= Jz 2

***Плоское движение***в плоскости xy

Вектор угловой скорости направлен вдоль оси z:

T=(0 0 z)

Первую формулу получим из теоремы Кенига

1) T = (MvC2+Jzc 2)

Еще одну формулу получим, введя в рассмотрение центр скоростей Р. Тогда скорость любой точки выражается через ее расстояние до Р.

v=



Значит существует вторая формула, через мгновенный центр:

2) T= JzР 2

**Мощность силы, приложенной к твердому телу.**

***Свободное движение.*** Пусть движение тела характеризуется скоростью полюса А и угловой скоростью . Найдем мощность силы , приложенной в некоторой точке М тела.



N(**F**)=**FV**=**F** (**vA+ω** Χ**ρ**) = **F**d**rA/**dt+**ω** (**ρ** Χ **F**)

Здесь учтена теорема о распределении скоростей

**V=VA+ω** Χ **ρ**

и произведена круговая перестановка в смешанном произведении

**F** (**ω** Χ **ρ**) = **ω** (**ρ** Χ **F**)

В скобках узнаем выражение момента силы **F** относительно полюса А. Поскольку **ω** направлен вдоль мгновенной оси S, то

**ω** (**ρ** Χ **F**) = **ωmA**(**F**) = ωS mS (F)

где ωS− проекция угловой скорости на S, а mS(F)− момент силы относительно этой оси. Приходим к выражению мощности силы:

Заметим, что знак второго слагаемого проще определить, сравнивая направления момента и вращения. Поэтому практически часто знак определяют отдельно и работу вычисляют по формуле

Заметим, что в отличие от формулы Кенига для кинетической энергии, здесь полюс А− произвольная точка тела, не обязательно центр масс.

Если к телу приложена система сил **{F}={F1F2 ...Fk...Fn}**, то после суммирования по к, получим

Здесь**−** главный вектор, а *MS*− главный момент относительно оси S системы внешних сил.

Пользуясь общей формулой, получим выражения работы для простейших движений тела.

***Поступательное движение***

Тело в поступательном движении не вращается (d’ϕS=0) и все его точки имеют одинаковое элементарное перемещение d**r**

***Вращательное движение***



Здесь есть смысл выбрать полюс А на оси вращения z, с которой совпадает мгновенной ось S. Тогда **VA**=0 иформула (\*) показывает, что мощность имеют моменты сил относительно оси вращения:

Знак плюс, если момент сонаправлен с угловой скоростью.

***Плоское движение***



Вспомним, что в этом движении направление мгновенной оси тоже не изменяется, она перпендикулярна плоскости движения. Поэтому элементарный угол поворота тоже является дифференциалом закона вращения. Формула приобретает вид

******

Например для одной силы **F** на Рис.2 получим

N(**F**)= **−**F**⋅**VACos α**−**FhA ω

Как известно, если ω не равно нулю, то существует мгновенный центр скоростей Р, скорость которого (а значит и элементарное перемещение) равна нулю в данный момент. Выбрав Р за полюс, из (\*) найдем, что в плоском движении работу совершают моменты сил относительно Р.

N**{F}**=MzР ω

Для конкретной силы **F** на Рис.2 имеем

N(**F**)= **−**FhР ω